

文章编号 1004-924X(2000)01-0005-06

任意槽形光栅衍射特性的矢量理论分析与计算

樊叔维

(中国科学院长春光学精密机械与物理研究所应用光学国家重点实验室, 吉林 长春 130021)

摘要: 根据麦克斯韦基本方程组, 推导了描述任意槽形光栅衍射特性的矢量理论分析方法——严格的耦合波方法, 该方法可用于分析具有任意面型函数光栅在 TE, TM 两种偏振模式的平面波入射下的光栅衍射特性。文中讨论了偏振状态及光栅结构参数对几种典型槽形光栅衍射场的影响。

关键词: 衍射; 介质光栅; 耦合波理论

中图分类号: O 439 文献标识码: A

1 引言

介质表面浮雕光栅在量子电子学, 集成光学, 以及全息摄影技术等领域的广泛应用^[1-2], 引起了研究人员对其衍射特性研究的极大兴趣。在研究任意面型函数的光栅衍射的实际问题中, 最先提出了积分方法^[3-4], 但由于积分方法数学模型极其复杂, 算法不宜实现, 且受到当时计算机内存及速度的限制, 使该方法的推广应用受到限制。于是研究人员提出了数学模型简单, 便于计算的微分方法^{[1][5]}, 并得到了广泛的应用^[6-7]。微分法在进行数值处理时, 需要非常精确, 稳定的算法, 这些算法使程序变得复杂, 而且有些算法在计算较大深度的光栅衍射特性时, 会出现不收敛的现象。耦合波方法是 80 年代提出的一种严格的矢量理论分析方法^[8-11], 它将光栅区域内的电磁场作空间谐波展开, 通过不同区域边界的电磁场边界匹配条件得到一组无限维耦合微分方程组, 采用一定的数学方法求得光栅电磁场衍射问题的精确解。它已被广泛应用于光栅结构的分析与设计中。

2 理论分析

求解光栅衍射场的矢量理论的一般方法就是求解在入射区域, 光栅区域以及透射区域内满足电磁场边界条件的麦克斯韦基本方程组的解。利用耦合波方法求解任意面型函数的光栅的电磁场衍射边值问题时, 它主要包括三个步骤: 1) 将光栅

分为许多薄层, 所分层数应足够近似光栅实际的面型函数; 2) 每个光栅薄层内的电磁场通过严格的耦合波方法确定; 3) 在不同区域边界面上及光栅薄层之间运用电磁场边界匹配条件, 通过一定的数学方法求得各级衍射波的振幅及衍射效率。在处理光栅各薄层之间电磁场量相互匹配的条件时, 会导致数值不稳定问题, 本文介绍的严格的耦合波方法, 对透射矩阵进行了一定的数学处理, 避免了计算过程中出现数值不稳定问题。

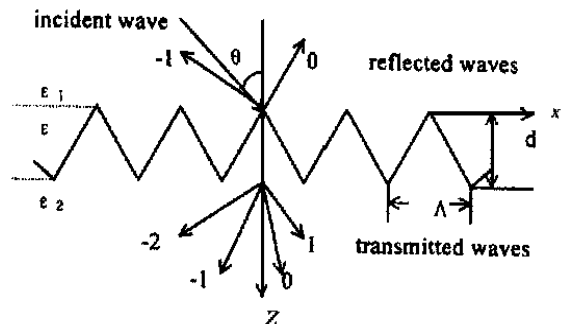


Fig 1 Geometry for the binary phase grating diffraction problem

本文分析的任意面型函数浮雕光栅的衍射问题如图 1 所示。一平面波以入射角 θ 入射, 则光栅将产生各级反射波及透射波, 如图 1 所示。反射区域及透射区域的介电常数分别为 ϵ_1, ϵ_2 , 光栅区域包含了两种介质的周期分布, 其介电常数为一周期的函数, 故可将介电常数用傅立叶级数展开:

$$\epsilon(x, z) = \epsilon(x + \Lambda, z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \epsilon_i(z) \exp(j 2\pi i x / \Lambda)$$

式中 $\epsilon_i(z)$ 为光栅区域内介电常数的第 i 级傅立叶系数, 它为光栅深度的函数。

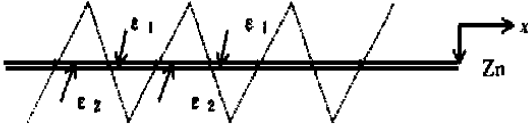


Fig 2 The n th planar grating resulting from the decomposition of the surface-relief grating into N thin gratings

将光栅分为 N 层薄层的第 n 层光栅如图 2 所示, 第 n 层光栅的深度为 d_n 。则每一个薄层光栅的介电常数为一周函数, 可用傅立叶级数展开为:

$$\epsilon_n(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \epsilon_{n,i} \exp(j2\pi i x / \Lambda)$$

式中 $\epsilon_{n,i}$ 为第 n 薄层光栅介电常数的傅立叶级数的第 i 级系数, 它是一个常数。

2.1 TE 偏振

对于 TE 偏振, 电场矢量平行于刻槽方向, 入射平面波的波长为 λ , 在入射区及透射区, 介电常数为常数, 可以直接求得在这两个区域内的电场分布为:

$$E_1 = \exp[-j(k_{0x}x - k_{0z}z)] + R_i \exp[-j(k_{ix}x - k_{1zi}z)] \quad (1)$$

$$E_3 = T_i \exp\{-j[k_{ix}x - k_{3zi}(z - d)]\} \quad (2)$$

其中: $k_{0x} = k_0 \sqrt{\epsilon_1} \sin \theta$, $k_{0z} = k_0 \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta$, $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ 为自由空间光波长。

$k_i = k_{0x} - ik_0\lambda/\Lambda$; k_i 为第 i 级衍射波矢的 x 分量。

$$k_{1zi} = \begin{cases} [(k_0 \sqrt{\epsilon_1})^2 - k_i^2]^{1/2} & k_0 \sqrt{\epsilon_1} > k_i \\ -j[k_i^2 - (k_0 \sqrt{\epsilon_1})^2]^{1/2} & k_0 \sqrt{\epsilon_1} < k_i \end{cases};$$

k_{1zi} 为入射区域第 i 级衍射波矢的 z 分量。 R_i 为第 i 级反射衍射波的振幅;

$$k_{3zi} = \begin{cases} [(k_0 \sqrt{\epsilon_3})^2 - k_i^2]^{1/2} & k_0 \sqrt{\epsilon_3} > k_i \\ -j[k_i^2 - (k_0 \sqrt{\epsilon_3})^2]^{1/2} & k_0 \sqrt{\epsilon_3} < k_i \end{cases}$$

k_{3zi} 为透射区域第 i 级衍射波矢的 z 分量。 T_i 为第 i 级透射衍射波的振幅;

在光栅区域, 第 n 薄层电场, 磁场可以表示为空间谐波的傅立叶级数展开:

$$E_{n,2y} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} V_{n,i}(z) \exp(-jk_{ix}) \quad (3)$$

$V_{n,i}(z)$ 为第 n 层第 i 级电场空间谐波的振幅;

$$H_{n,2x} = -j \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} U_{n,i}(z) \exp(-jk_{ix}) \quad (4)$$

$U_{n,i}(z)$ 为第 n 层第 i 级磁场空间谐波的振幅;

在第 n 层光栅区域, 场振幅必须满足麦克斯韦基本方程组:

$$\frac{\partial E_{n,2y}}{\partial z} = j\omega\mu_0 H_{n,2x}$$

$$\frac{\partial H_{n,2x}}{\partial z} = j\omega\mu_0 E_{n,2y} + \frac{\partial U_{n,2z}}{\partial z} \quad (5)$$

将 (3), (4) 式代入 (5) 经过一系列数学推导, 得到第 n 层光栅区域的一组耦合波方程:

$$\frac{\partial V_{n,i}}{\partial z} = k_i V_{n,i} - k^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_{n,i-n} V_{n,n} \quad (6)$$

该耦合波方程采用本征值法求解如下:

$$V_{n,i}(z) = \sum_m w_{n,bm} \{c_{n,m1} \exp[-k_0 q_{n,m}(z - D_n + d_n)] + c_{n,m2} \exp[k_0 q_{n,m}(z - D_n)]\}$$

$$U_{n,i}(z) = \sum_m S_{n,m1} \{-c_{n,m1} \exp[-k_0 q_{n,m}(z - D_n + d_n)] + c_{n,m2} \exp[k_0 q_{n,m}(z - D_n)]\}$$

$$D_n - d_n < z < D_n, D_n = \sum_{l=1}^n d_l \quad (7)$$

上式中, $q_{n,m}$ 为本征值; $w_{n,bm}$ 本征值 $q_{n,m}$ 对应的本征矢量的第 l 个分量; $S_{n,bm} = w_{n,bm} q_{n,m}$; $c_{n,m1}, c_{n,m2}$ 为待定系数, 由边界条件来确定如下: 在入射区域与第 1 薄层光栅的边界面上, 有:

$$\delta_0 + R_i = V_{1,i}(0)$$

$$j[k_{0z} - k_{1zi}R] = -k_0 U_{1,i}(0) \quad (8)$$

在第 N 薄层光栅与透射区域的边界面上, 有:

$$T_i = V_{N,i}(d)$$

$$jk_{3zi}T_i = -k_0 U_{N,i}(d) \quad (9)$$

在第 n 薄层光栅与第 $n-1$ 薄层光栅的边界面上有:

$$\sum_m w_{n-1,bm} [c_{n-1,m1} \exp(-k_0 q_{n-1,m} d_n) + c_{n-1,m2}]$$

$$= \sum_m w_{n,bm} [c_{n,m1} + c_{n,m2} \exp(-k_0 q_{n,m} d_n)]$$

$$S_{n-1,m1} [c_{n-1,m1} \exp(-k_0 q_{n-1,m} d_n) - c_{n-1,m2}]$$

$$= \sum_m S_{n,bm} [c_{n,m1} - c_{n,m2} \exp(-k_0 q_{n,m} d_n)] \quad (10)$$

由方程组 (8) - (10) 可以求得 $c_{n,m1}, c_{n,m2}$, 及

R_i, T_i 。则反射区及透射区的各级衍射波的衍射效率为:

$$\begin{aligned} \text{eff}_{r_i} &= |R_i|^2 R e^{[k_{1z i} / (k_0 \epsilon^{1/2} \cos \theta)]}; \text{eff}_{t_i} \\ &= |T_i|^2 R e^{[k_{3z i} / (k_0 \epsilon^{1/2} \cos \theta)]} \end{aligned} \quad (11)$$

对于完全透明介质, 不考虑吸收损耗, 则各级次的衍射效率总和应为 1, 即有:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{eff}_{r_i} + \text{eff}_{t_i} = 1 \quad (12)$$

直接由方程组 (8)~ (10) 求解 R_i, T_i , 不会有任何数值不稳定问题出现。但是, 当光栅区域分层很多, 即 N 很大作实际计算时, 计算时间将非常长, 因此必须采取措施提高计算效率。透射矩阵方法可以用来提高计算效率, 并通过一定的数学变换克服该方法带来的数值不稳定问题。由方程组 (8)~ (10) 可知, 通过薄层光栅的系数之间存在的递推关系, 以矩阵形式, 可以推出:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \delta_i \\ j \delta k_{0x} / k_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ -jk_{1z i} / k_0 \end{bmatrix} R \\ &= \prod_{n=1}^N \begin{bmatrix} W_n & W_{n \times n} \\ S_n & -S_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{n \times n} & W_n \\ S_{n \times n} & -S_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ jk_{3z i} / k_0 \end{bmatrix} T \end{aligned} \quad (13)$$

方程 (13) 中矩阵求逆时, 会带来数值不稳定问题, 因此, 在实际应用时, 做如下数学变换:

$$\begin{bmatrix} W_{n \times n} & W_n \\ S_{n \times n} & -S_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} X_n & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} W_n & W_n \\ S_n & -S_n \end{bmatrix}^{-1} \quad (14)$$

令 $f_{N+1} = I, g_{N+1} = jY$, 其对角线元素为 $k_{3z i} / k_0$ 矩阵。对第 N 层及第 n 层薄层光栅, 令:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_N \\ b_N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} W_N & W_N \\ S_N & -S_N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_{N+1} \\ g_{N+1} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} W_n & W_n \\ S_n & -S_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ g_{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

并对矩阵 T 做数学变换: $T = a_N^{-1} X_N T_N$

将上述变换代入方程 (13) 中, 通过薄层光栅系数之间存在的递推关系, 可以非常简洁地求得 R_i, T_i , 避免了数值不稳定问题, 具体推导过程略去。

对于 TM 偏振, 可进行类似处理, 具体求解步骤, 不再赘述。

3 数值计算

应用严格的矢量理论方法——耦合波方法, 对于入射光为 TE 偏振光与 TM 偏振光, 分别计

算了不同面型函数光栅, 在不同的入射光波参数及光栅参数情况下, 各级衍射光的衍射效率的变化。本文计算的光栅的面型函数分别为正弦型, 三角型, 锯齿型, 以及阶梯型。图 3 给出了 TE 偏振下入射角对正弦型槽光栅衍射特性的影响, 并将计算结果与文献 [6] 的计算结果进行了比较, 二者相当吻合。

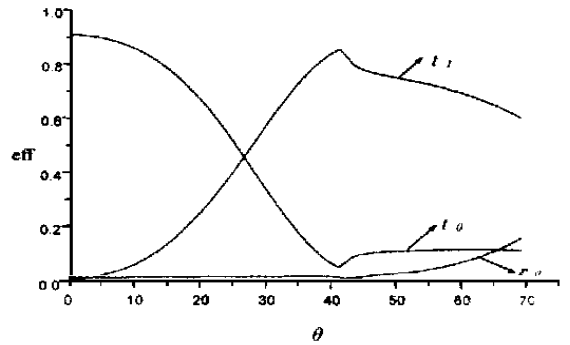


Fig 3 Diffraction efficiency as a function of incidence angle for a lossless sinusoidal surface-relief grating TE polarization ($\Lambda = 0.6\lambda, d = 0.6\lambda, n_1 = 1, n_3 = 2$)

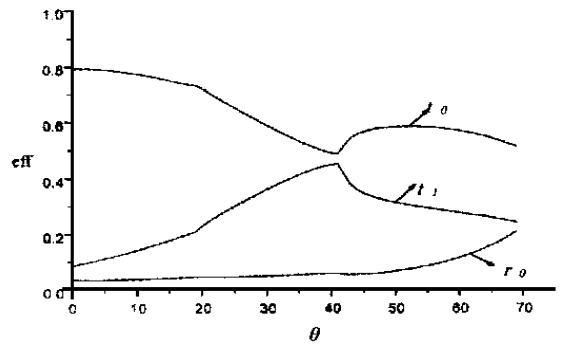


Fig 4 Diffraction efficiency as a function of incidence angle for a lossless triangular surface-relief grating TE polarization ($\Lambda = 0.6\lambda, d = 0.4\lambda, n_1 = 1, n_3 = 2$)

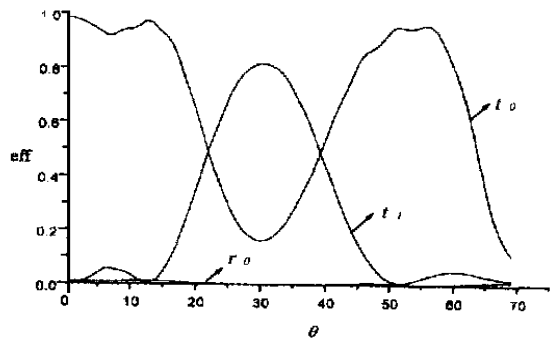


Fig 5 Diffraction efficiency as a function of incidence angle for a lossless triangular surface-relief grating TE polarization ($\Lambda = 1\lambda, d = 10\lambda, n_1 = 1, n_3 = 2$)

图 4, 图 5 给出了三角型槽光栅在光栅深度分别为 0.4 倍及 10 倍波长时在不同的入射角下

各级衍射波衍射效率的变化曲线, 从该两图可以看出, 本文给出的算法在光栅浅槽及深槽时, 均能给出稳定而收敛的结果, 避免了一般算法在深槽光栅时易出现的不稳定问题。

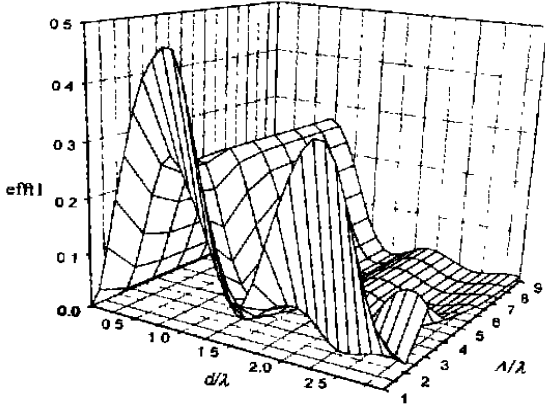


Fig 6 Diffraction efficiency as a function of grating parameters for a lossless triangular surface-relief grating TE polarization ($\theta=0, n_1=1, n_3=2$)

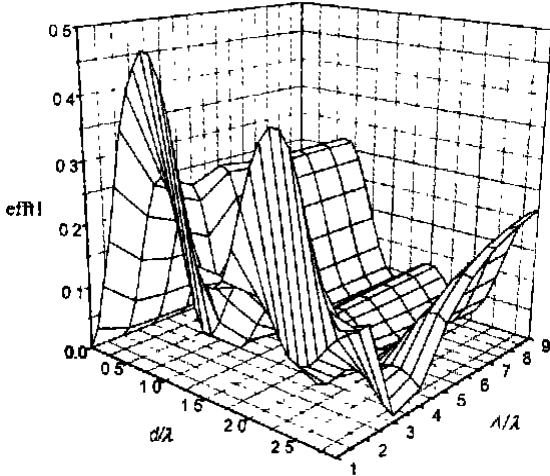


Fig 7 Diffraction efficiency as a function of grating parameters for a lossless sinusoidal surface-relief grating TE polarization ($\theta=0, n_1=1, n_3=2$)

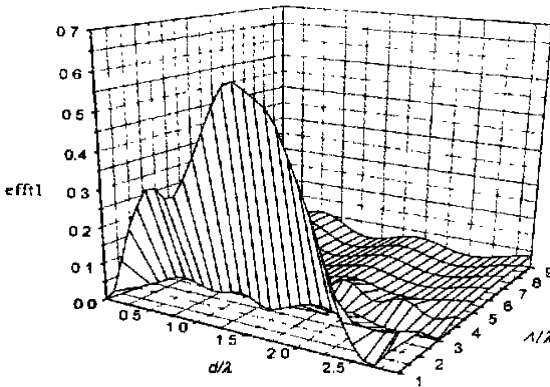


Fig 8 Diffraction efficiency as a function of grating parameters for a lossless saw tooth surface-relief grating TE polarization ($\theta=0, n_1=1, n_3=2$)

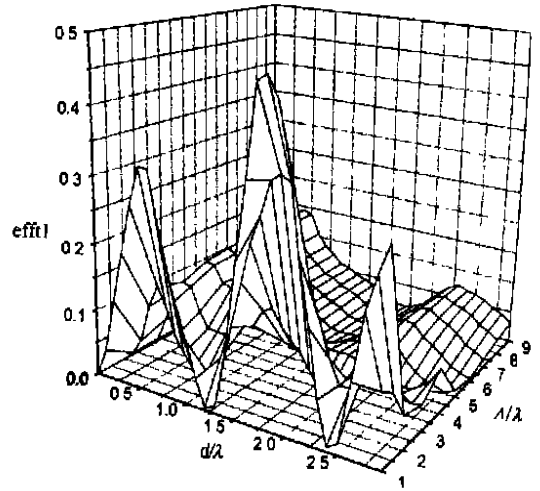


Fig 9 Diffraction efficiency as a function of grating parameters for a lossless symmetric staircase surface-relief grating TE polarization ($\theta=0, n_1=1, n_3=2$)

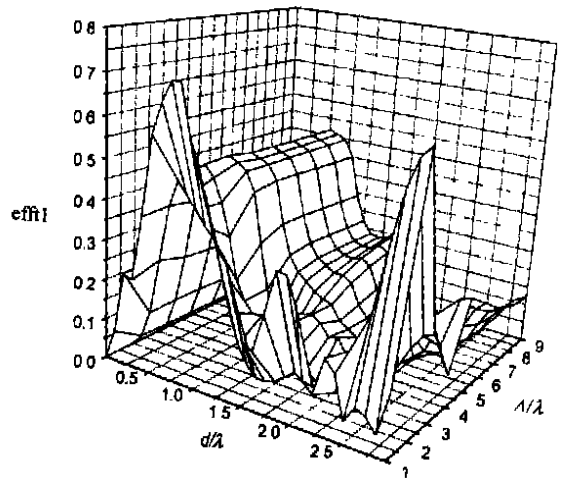


Fig 10 Diffraction efficiency as a function of grating parameters for a lossless symmetric staircase surface-relief grating TE polarization ($\theta=0, n_1=1, n_3=2$)

图 6~ 图 10 给出了光栅结构参数: 光栅深度及光栅周期对透射区- 1 级衍射效率的影响, 图 6 ~ 图 10 对应的光栅面型函数分别为: 三角型, 正弦型, 锯齿型, 二级对称阶梯型以及二级不对称阶梯型。图 3~ 图 10 中, 入射光波为 TE 偏振。从图中可以发现, 衍射效率随光栅深度的变化呈有规律的周期性变化, 而衍射效率随光栅周期的变化又与光栅深度的大小密切相关, 当光栅深度较小时, 衍射效率在光栅周期大于 5 倍的波长时即趋于稳定值; 而当光栅深度较大时, 衍射效率在光栅周期大于 10 倍的波长时才逐渐趋于稳定值。

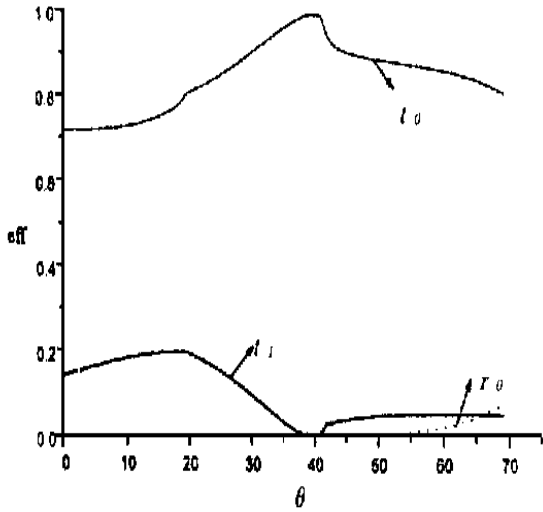


Fig 11 Diffraction efficiency as a function of incidence angle for a lossless triangular surface-relief grating TM polarization ($\Lambda= 0.6\lambda, d= 0.4\lambda, n_1= 1, n_3= 2$)

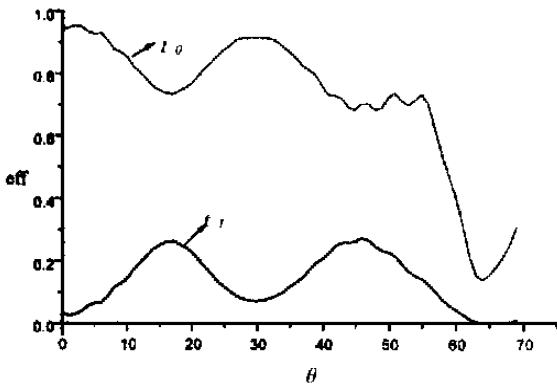


Fig 12 Diffraction efficiency as a function of incidence angle for a lossless triangular surface-relief grating TM polarization ($\Lambda= \lambda, d= 10\lambda, n_1= 1, n_3= 2$)

图 11~ 图 13 中, 入射光波为 TM 偏振。图 11, 图 12 对应图 4, 图 5, 给出了在 TM 偏振下, 三角型槽光栅在光栅深度分别为 0.4 倍及 10 倍波长时在不同的入射角下各级衍射波衍射效率的变化曲线。由各图对比可以看出, 对不同的偏振状态, 入射角对衍射效率的影响变化很大。

参考文献:

[1] Petit R. Electromagnetic theory of gratings[M] Berlin: Springer-Verlag, 1980
 [2] Gaylord T K, et al Analysis and applications of optical diffraction by gratings[C] Proc IEEE , 1985, 73(7): 894~ 937.
 [3] Neueruther A R, et al Numerical methods for the analysis of scattering from nonplanar and periodic structures [J] A lta Freq, 1969, 38(2): 282~ 285
 [4] Maestre D. A new general integral theory for dielectric coated gratings[J]. J Opt Soc Am , 1978, 68(4): 490~ 495

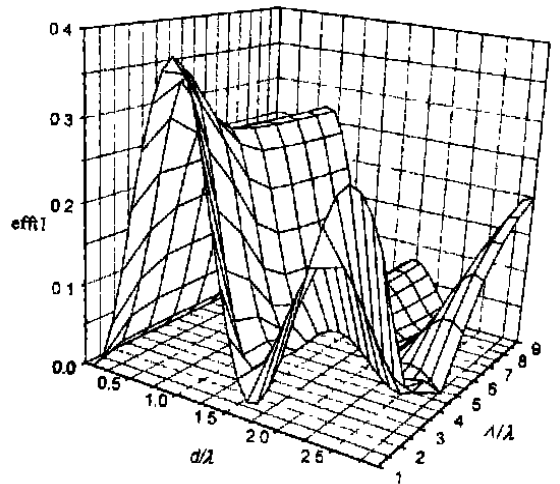


Fig 13 Diffraction efficiency as a function of grating parameters for a lossless sinusoidal surface-relief grating TM polarization ($\theta= 0, n_1= 1, n_3= 2$)

图 13 对应于图 7, 给出了在 TM 偏振下, 正弦型槽光栅的光栅结构参数对透射区 - 1 级衍射效率的影响。对比这两个图, 可以看出, 对不同的偏振状态, 光栅结构参数对衍射效率的影响相似, 即衍射效率随光栅深度的变化呈有规律的周期性变化, 而且衍射效率随光栅周期的变化又与光栅深度的大小密切相关。其他几种槽形光栅在入射光 TM 偏振下的计算结果因篇幅所限未附。

4 结 论

通过数值计算, 可以发现, 在不同的偏振状态下, 采用严格的耦合波理论, 可以简便, 有效地求解不同面型函数的光栅衍射特性的问题。利用本文给出严格的耦合波方法, 计算中从未发生过数值不稳定问题, 表明该方法是一种稳定, 有效的矢量理论分析方法。本文对几种典型槽形光栅衍射场进行了计算, 计算结果表明, 入射光的方向, 光栅的结构参数对光栅衍射特性产生不同的影响。

- [5] Neviere M, et al About the theory of optical grating coupler-waveguide systems[J]. Opt Commun, 1973, 8(2): 113~ 117.
- [6] Tremain D E, et al Application of the unimoment method to scattering from periodic structures[J]. J Opt Soc Am, 1978, 68(6): 775~ 783
- [7] Chang K C, et al Scattering and guiding of waves by dielectric gratings with arbitrary profiles[J]. J Opt Soc Am, 1980(7), 70: 804~ 813
- [8] Moharam M G, et al Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction[J]. J Opt Soc Am, 1981, 71(7): 811~ 818
- [9] Moharam M G, et al Diffraction analysis of dielectric surface-relief gratings[J]. J Opt Soc Am, 1982, 72(10): 1385 ~ 1392
- [10] Moharam M G, et al Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings[J]. J Opt Soc Am A, 1995, 12(5): 1068~ 1076
- [11] Moharam M G, et al Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix approach[J]. J Opt Soc Am, 1995, 12(5): 1077~ 1085

Vector theory analysis and numerical calculation for any shape profile dielectric gratings

FAN Shu-wei

*(Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics,
Chinese Academy of Sciences, Changchun 130021, China)*

Abstract: Based on the Maxwell equation and the boundary continuity of electromagnetic field, the vector theory analysis method - the rigorous coupled-wave analysis technique for describing the diffraction of electromagnetic waves by any shape profile gratings for both TE and TM polarization is presented. For any shape profile gratings, the distribution of diffraction efficiency with TE and TM polarization are given. The effect of grating structure parameters, incident angle and polarization on field is investigated.

Key words: diffraction; dielectric grating; coupled-wave theory

作者简介: 樊叔维(1968-), 女, 山东鱼台人。1989年毕业于西安交通大学, 1997年在该校获得博士学位。现为中国科学院长春光机所博士后。